МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ТУР
2020 — 2021 УЧ. Г.

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ
9 класс

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1) Максимальная оценка за каждую задачу — **7 баллов**.

2) **7 баллов** ставится за безукоризненное решение задач;

6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение.

4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом.

2 или 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении.

1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален.

Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в **0 баллов**, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школь-

ник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т. п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты — **varyag2@mail.ru**, тел. **+7 922 035 03 24**).

9 КЛАСС

9.1 *Игрок на бирже каждый рабочий день (с понедельника по пятницу включительно) удваивает свой капитал. Но в субботу и воскресенье он кутит, и за каждый день кутежа тратит 75% своего состояния. К вечеру 31 декабря он впервые в жизни стал миллионером. На какой день недели пришлось 1 сентября этого же года — день, когда он впервые начал играть на бирже? Ответ обоснуйте.*

Решение. Капитал биржевика за каждый из выходных дней уменьшается в 4 раза, значит, за субботу и воскресение он уменьшается в 16 раз. За следующие 4 дня, то есть к вечеру четверга, он успеет только восстановиться. Следовательно, увеличения капитала (по сравнению с предыдущей неделей) возможно только в пятницу. Значит, 31 декабря была пятница. Тогда пятницей были также следующие дни: в декабре: 24, 17, 10, 3. В ноябре: 26, 19, 12, 5. В октябре: 29, 22, 15, 8, 1. В сентябре: 24, 17, 10, 3. Тогда 1 сентября была среда.

Ответ: Среда.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	**ОЦЕНКА**
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что 31 декабря пришлось на пятницу	5 баллов
Задача верно решена в предположении, что 31 декабря — пятница, но этот ключевой факт не обоснован	3 балла
Доказано, что 1 сентября могло быть средой (построен возможный пример движения капитала), но не обосновано, что другие дни недели не удовлетворяют условию задачи	2 балла
Верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

9.2 *Про коэффициенты a, b, c и d двух квадратных трёхчленов x^2+bx+c и x^2+ax+d известно, что $0 < a < b < c < d$. Могут ли эти трёхчлены иметь общий корень? Ответ обоснуйте.*

Решение. Пусть x_0 — общий корень этих трёхчленов. Тогда выполнена система уравнений $\begin{cases} x_0^2 + bx_0 + c &= 0 \\ x_0^2 + ax_0 + d &= 0 \end{cases}$. Приравняв левые части уравнений друг к другу, получим равенство $bx_0 + c = ax_0 + d$, откуда $x_0 = \dfrac{d-c}{b-a}$. Полученная дробь является положительным числом в силу условий на коэффициенты a, b, c d. Значит, общий корень, если он есть, обязан быть положительным. Но в этом случае левая часть любого из уравнений системы положительна, и уравнение быть верным никак может. Полученная система, следовательно, решений не имеет, и общего корня у трёхчленов нет.

Ответ: Не может.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	**ОЦЕНКА**
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Обосновано, что общий корень, если он есть, обязан быть положительным	4 балла
Общий корень верно выражен через коэффициенты a, b, c и d	3 балла
Указано, что все корни каждого (или хотя бы одного) уравнения отрицательны	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием, а также иллюстрация утверждения конкретными примерами	0 баллов

9.3 *Вася тренируется на катке. Он положил три шайбы в вершины треугольника, а затем бьет по одной из шайб так, чтобы она (двигаясь по прямой) прошла в ворота, образуемые двумя другими шайбами.*

а) Могут ли после 7 бросков все три шайбы оказаться в прежних местах?

б) Могут ли они после 7 бросков оказаться в вершинах того же треугольника? Ответы обоснуйте.

Решение. а) Предположим, что это возможно. Обозначим начальное (оно же конечное) положение шайб буквами A, B, C. Обойдём треугольник по маршруту $A \to B \to C \to A$; без ограничения общности можно считать, что обход осуществился по часовой стрелке. Рассмотрим, что произойдёт с этим обходом после первого броска Васи. Предположим Вася ударил по шайбе A (остальные случаи аналогичны), и она переместилась в точку A_1. Теперь обход по маршруту $A_1 \to B \to C \to A_1$ осуществляется против часовой стрелки. Значит, при каждом броске Васи направление обхода меняется, и после 7 бросков обход $A \to B \to C \to A$ должен осуществляться против часовой стрелки. Противоречие.

б) Да, это возможно. Например, пусть шайбы A и B в начале лежат в соседних вершинах правильного пятиугольника, а шайба C — в его центре. Тогда Вася может (см. рисунок) первыми пятью бросками поменять местами шайбы A и B, посылая каждый раз их по диагоналям пятиугольника. Два последних броска Вася может использовать, отправив одну из шайб по маршруту «туда — сюда» (на рисунке Вася бросает шайбу C).

Ответ: а) Нет; б) Могут.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	**ОЦЕНКА**
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Верное доказательство пункта а, если пункт б не решён или решён неверно	5 баллов
Верный пример к пункту б при отсутствии доказательства (или при неверном доказательстве) пункта а	2 балла
Оба пункта задачи не выполнены, но есть идея рассмотреть ориентацию вершин треугольника	1 балл
Ответы без обоснований или с неверными обоснованиями	0 баллов

9.4 *В тридевятом царстве в обращении находятся монеты трех видов: бронзовые рубли, серебряные монеты достоинством* 9 *рублей и золотые монеты достоинством* 81 *рубль. Из казны, в которой содержится неограниченный запас монет каждого вида,* 23 *монетами была выдана некоторая сумма, меньшая* 700 *рублей. Найдите эту сумму, если известно, что меньшим числом монет выдать её невозможно.*

Решение. Так как выданная сумма меньше 700 рублей, золотых монет меньше, чем $700 : 81$, то есть не более 7. Тогда бронзовых и серебряных монет вместе не менее $23 - 7 = 16$. Заметим, что бронзовых монет не может быть больше 8: иначе мы можем заменить 9 бронзовых на 1 серебряную и способ выдачи суммы не единственен. Аналогично серебряных монет не больше 8. Значит, их ровно по 8, а золотых монет 7. Выданная сумма (в рублях) равна $8 \cdot 1 + 8 \cdot 9 + 7 \cdot 81 = 647$.

Ответ: 647 рублей.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	**ОЦЕНКА**
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Приведён верный ответ и показано, что сумма 647 рублей может быть выдана единственным способом. При этом не показана единственность такого числа.	4 балла
Доказано, что бронзовых (или серебряных монет) выдано не больше 8	3 балла
Верный, но необоснованный ответ	1 балл

9.5 *В некоторых клетках таблицы* 10×10 *поставлены крестики так, что каждый из них — единственный либо в своей строке, либо в своём столбце. Какое наибольшее число крестиков может быть в такой таблице? Ответ обоснуйте.*

Решение. Поставим крестики во все клетки первой строки и первого столбца, исключая левую верхнюю клетку — всего 18 крестиков. тогда каждый крестик первой строки единственен в своём столбце, а каждый крестик первого столбца единственен в своей строке. Значит, 18 крестиков расставить можно.

Покажем, что если мы расставим 19 крестиков (тем более, если больше), какой-то крестик будет не единственным ни в своей строке, ни в своём столбце. Предположим противное. Будем называть строки и столбцы просто линиями. Припишем каждому крестику ту линию, в которой он единственен (если таких две, то любую из них). Тогда разным крестикам приписаны разные линии; крестиков 19, линий 20, так что все линии, кроме одной, приписаны к какому-то крестику, следовательно, содержат по одному крестику ровно. Единственная не приписанная линия содержит не более 10 крестиков (на ней больше не поместится). Всего пар крестик — линия, где линия содержит крестик, будет не более, чем $19 + 10 = 29$. Но на самом деле их $19 \cdot 2 = 38$ — противоречие.

Ответ: 18 крестиков.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	**ОЦЕНКА**
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Верное обоснование, что 19 крестиков в таблицу поставить нельзя (при отсутствии доказательства, что 19 можно)	4 балла
Верный пример расстановки 18 крестиков (или доказательство существования такого примера)	2 балла
Примеры расстановки меньшего, чем 18, числа крестиков и/или доказательства, что крестиков не может быть 20 или более	0 баллов

9.6 *Два равных отрезка AB и CD перпендикулярны, причём точка C лежит на отрезке AB. Точка X такова, что $BX = XC$ и $AX = XD$.*

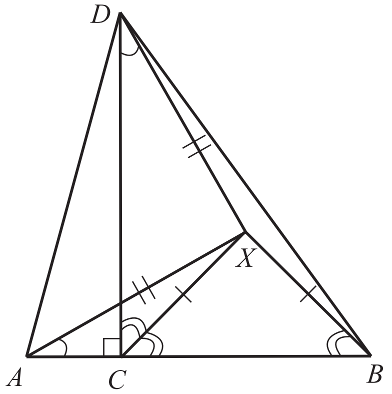
а) Докажите, что треугольник BXC прямоугольный.

б) Докажите, что треугольник AXD — прямоугольный.

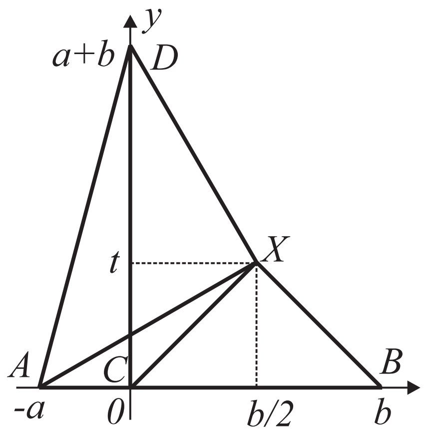
Решение. Способ 1. Треугольники AXB и CXD равны по трём сторонам. Отсюда угол XCD равен углу XBA. Так как треугольник BXC равнобедренный, $\angle XBC = \angle XCB$, поэтому луч CX — биссектриса прямого угла BCD. Треугольник BXC тогда равнобедренный с углом при основании $45°$, откуда следует, что угол CXB — прямой, что доказывает пункт а.

Из равенства тех же треугольников AXB и CXD следует равенство углов: $\angle XAB = \angle XDC$. Тогда отрезок C виден из точек A и D под одним углом. Учитывая, что точки A и D лежат по одну сторону от прямой CX, находим, что около четырёхугольника

$ADXC$ описывается окружность. Угол ACD прямой и вписанный в окружность, значит, CD — её диаметр. Тогда угол AXD прямой, так как он вписан и опирается на диаметр.



Способ 1



Способ 2 К решению задачи 9.6

Способ 2. Введём систему координат. Начало координат пусть будет в точке C. Ось абсцисс направим по лучу CB, ось ординат — по лучу CD. Пусть точка B имеет координаты $(b;\,0)$, точка A — координаты $(-a;\,0)$ (a, b — положительные числа). Тогда длина отрезка AB равна $a+b$ и равна длине отрезка CD по условию. Значит, координаты точки D равны $(0;\,a+b)$ — см. рисунок.

Точка X, будучи равноудалённой точкой от точек C и B, лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC, то есть имеет абсциссу, равную $\dfrac{b}{2}$. Пусть её ордината равна t. Тогда $AX^2 = \left(\dfrac{b}{2}+a\right)^2 + t^2$, $DX^2 = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + (a+b-t)^2$. Так как $AX = DX$, получаем после преобразований $t = \dfrac{b}{2}$ и $X\left(\dfrac{b}{2};\,\dfrac{b}{2}\right)$.

Остаётся проверить выполнимость теоремы Пифагора для треугольников BXC и AXD. Действительно,

$BX^2 = CX^2 = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 = \dfrac{b^2}{2}$; $BC = b$, откуда $BX^2 + CX^2 = BC^2$.

$AX^2 = DX^2 = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + \left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2 = \dfrac{b^2}{2} + ab + a^2$; $AD^2 = a^2 + (a+b)^2 = 2a^2 + 2ab + b^2$, откуда $AX^2 + DX^2 = AD^2$.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	**ОЦЕНКА**
Верное доказательство обоих пунктов а и б	7 баллов
Верно доказан только один из пунктов а или б	5 баллов
Доказано равенство треугольников AXB и CXD ИЛИ введена система координат и верно определены координаты всех 5 точек из условия	3 балла
При верном ходе решения доказательство не получено ввиду ошибок в формулах или вычислениях ИЛИ введена система координат, но верно определены координаты только 4 точек из условия	2 балла
Утверждения и выкладки, из которых ход решения не просматривается или задача решена только в частных случаях (например, когда C — середина отрезка AB)	0 баллов