МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ТУР
2020 — 2021 УЧ. Г.

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ
8 класс

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1) Максимальная оценка за каждую задачу — **7 баллов**.

2) **7 баллов** ставится за безукоризненное решение задач;

6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение.

4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом.

2 или 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении.

1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален.

Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в **0 баллов**, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школь-

ник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т. п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты — **varyag2@mail.ru**, тел. +**7 922 035 03 24**).

8 КЛАСС

8.1 *Имеется набор гирь, в котором самая тяжелая гиря в 5 раз тяжелее среднего веса всех гирь. Сколько гирь может быть в наборе? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.*

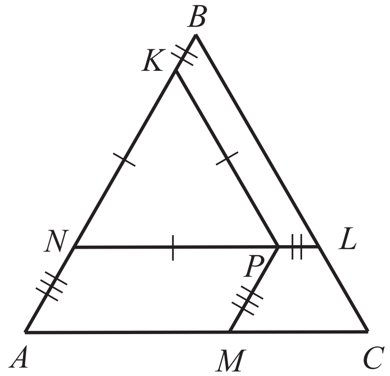
Решение. Пусть средний вес n гирь равен x. Тогда самая тяжёлая гиря весит $5x$, а вес $n-1$ оставшейся гири равен $nx-5x$. Это число должно быть положительным, так что $n>5$. При любом таком n ситуация возможна, например, все остальные гири весят поровну, по $\dfrac{x(n-5)}{n-1}$.

Ответ: Любое количество, большее 5.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	ОЦЕНКА
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Верное доказательство, что количество гирь в наборе большее пяти	4 балла
Примеры, доказывающие, что любое количество гирь, большее пяти, возможно (или иное доказательство этого факта)	3 балла
Примеры таких наборов гирь (в любом количестве)	1 балл
Ответ без обоснования	0 баллов

8.2 *Внутри правильного треугольника ABC отметили точку P, а на сторонах AB, BC и CA — соответственно точки K, L и M так, что $PK \parallel BC$, $PL \parallel AC$ и $PM \parallel BA$. Докажите, что сумма отрезков PK, PL и PM равна стороне треугольника.*

Решение. Продолжим отрезок LP за точку P до пересечения со стороной AB в точке N (см. рисунок). Тогда 1) Четырёхугольник $ANPM$ — параллелограмм, поэтому $AN=PM$. 2) Треугольник NPK — правильный, так как его стороны параллельны сторонам исходного треугольника, поэтому $NK=PK$. 3) Четырёхугольник $LPKB$ — равнобедренная трапеция, так как $BL \parallel KP$ и $\angle KBL = \angle PLB$, откуда $KB=PL$. Тогда $PM+PK+PL = AN+NK+KB = AB$, что и требуется доказать.



К решению задачи 8.2

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	ОЦЕНКА
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Утверждение доказано для частных случаев расположения точки P (например, для всех точек высоты)	2 балла
Рассуждения и выкладки, из которых ход доказательства не виден	0 баллов

8.3 *Число* $\sqrt{1+2019^2+\frac{2019^2}{2020^2}}+\frac{2019}{2020}$ *является целым. Найдите его.*

Решение. Пусть $a = 2020$. Тогда искомое число равно $\sqrt{1+(a-1)^2+\frac{(a-1)^2}{a^2}}+\frac{a-1}{a}$. Проведём равносильные преобразования:

$$\sqrt{1+(a-1)^2+\frac{(a-1)^2}{a^2}}+\frac{a-1}{a}=\frac{\sqrt{a^2(a-1)^2+(a-1)^2+a^2}}{a}+\frac{a-1}{a}=$$

$$=\frac{\sqrt{a^4-2a^3+3a^2-2a+1}}{a}+\frac{a-1}{a}=\frac{\sqrt{(a^2-a+1)^2}}{a}+\frac{a-1}{a}=\frac{a^2-a+1+a-1}{a}=a.$$

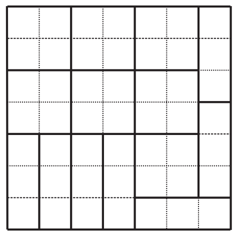
Значит, данное число равно 2020.

Ответ: 2020.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	ОЦЕНКА
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Вычисления производятся «в лоб», при этом допущены арифметические ошибки	снять 1 балл за каждую ошибку
При верном решении использованы, но не доказаны формулы, не входящие в школьную программу (например, $\sqrt{a^2+(a+1)^2+a^2\cdot(a+1)^2}=a^2+a+1$)	5 баллов
Удачной заменой задача сведена к алгебраической, но в дальнейших преобразованиях есть ошибки	3 балла
Верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

8.4 *Рабочие укладывали квадратный пол размером $n \times n$ плитками размером 2×2 и 3×1. Им удалось полностью уложить пол, использовав для этого одинаковое количество плиток каждого типа. При каких n это возможно? Ответ обоснуйте.*

Решение. Пусть использовано по a плиток каждого вида. Тогда из равенства площадей следует $4a+3a=n^2$. Отсюда число n^2, а тогда и число n делится нацело на 7. Покажем, что любое n, кратное 7, подойдёт. Действительно, в этом случае квадратный пол делится на непересекающиеся квадраты $7{\times}7$, так что достаточно показать, как покрыть пол размера 7×7, затратив поровну плиток обеих размеров (по 7 плиток). Как это можно сделать, показано на рисунке.



К решению задачи 8.4

Ответ: При всех n, кратных 7.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	ОЦЕНКА
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Обоснование того, что n обязано делится на 7 и верные примеры для конкретных n, кратных 7	5 баллов
Только обоснование того, что n обязано делится на 7	4 балла
Верное доказательство, что все числа, кратные 7, удовлетворяют условию	3 балла
Верные примеры замощения для конкретных n, кратных 7	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

8.5 *На острове живет 25 человек: рыцари, лжецы и хитрецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, а хитрецы отвечают на заданные им вопросы по* *очереди, то правду, то ложь. Всем жителям острова было задано три вопроса: «Вы рыцарь?», «Вы хитрец?», «Вы лжец?» (вопросы задавались именно в указанной последовательности). На первый вопрос утвердительно ответили* 21 *человек, на второй —* 17 *человек, на третий —* 6 *человек. Сколько рыцарей живет на этом острове?*

Решение. Каждый рыцарь ответит «да» на первый вопрос и «нет» на два других. Каждый лжец ответит «да» на первые два вопроса и «нет» на последний. А хитрецы делятся на тех, кто на первый вопрос ответил правдиво (хитрецы первого типа), и тех, кто на первый вопрос ответил лживо (хитрецы второго типа). Хитрецы первого типа на все вопросы ответят отрицательно, а хитрецы второго типа — положительно. Результаты можно записать в виде таблицы

тип жителя	**Вы рыцарь?**	**Вы хитрец?**	**Вы лжец?**
Рыцарь	да	нет	нет
Лжец	да	да	нет
Хитрец 1 типа	нет	нет	нет
Хитрец 2 типа	да	да	да
Количество ответов «да»	21	17	6

Заметим, что на последний вопрос утвердительно ответят хитрецы второго типа, и только они. Значит, хитрецов второго типа 6 человек. На первый вопрос не ответят утвердительно только хитрецы первого типа, и их всего $25-21=4$ человека. На второй вопрос утвердительно ответят лжецы и хитрецы второго типа (и только они), поэтому лжецов $17-6=11$. Значит, рыцарей на острове $25-6-4-11=4$.

Ответ: 4 рыцаря.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	**ОЦЕНКА**
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Верный ход решения при наличии арифметических ошибок, возможно, повлекших неверный ответ	снять 1 балл за каждую ошибку
Верно и обосновано найдено только количество лжецов или только количество хитрецов	3 балла
Рассмотрение двух типов хитрецов (не приведшее к решению)	2 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл

8.6 *Каждый ученик восьмого класса дружит ровно с двумя учениками седьмого класса, а каждый ученик седьмого класса дружит ровно с тремя учениками восьмого* *класса. В восьмом классе не более 29 учеников, а в седьмом — не менее 17. Сколько учеников в восьмом классе? А в седьмом? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.*

Решение. Пусть в восьмом классе s учеников, в седьмом — t. Тогда количество пар друзей-учащихся разных классов равно $2s$ и оно же равно $3t$. Из равенства $2s = 3t$ видим, что s кратно 3, а t кратно 2. Тогда $2s = 3t$ кратно 6. Кроме того, $2s \leqslant 58$, $3t \geqslant 51$. Отсюда $2s = 3t = 54$, $s = 27$, $t = 18$.

Ответ: В 8-м классе учится 27 учеников, в 7-м — 18.

Примечание. В задаче не требуется построения примера системы дружб, реализующих условие задачи. Предполагается априорно, что ситуация, описанная в условии, возможна.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	ОЦЕНКА
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Доказаны три утверждения: — восьмиклассников в полтора раза больше, чем семиклассников — количество восьмиклассников кратно 3; — количество семиклассников чётно	6 баллов
Доказаны два из трёх утверждений (см. пункт на 6 баллов)	4 балла;
Доказано одно из трёх утверждений (см. пункт на 6 баллов)	2 балла
Верный ответ без обоснования или верный пример таких классов и системы дружб учащихся	1 балл