МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ТУР
2020 — 2021 УЧ. Г.

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ
9 класс

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1) Максимальная оценка за каждую задачу — **7 баллов**.

2) **7 баллов** ставится за безукоризненное решение задач;

6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение.

4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом.

2 или 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении.

1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален.

Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в **0 баллов**, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школь-

ник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т. п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты — **varyag2@mail.ru**, тел. **+7 922 035 03 24**).

7 КЛАСС

7.1 *Девять чисел записаны в одну строчку. Сумма любых двух соседних из них отрицательна, а сумма всех девяти чисел положительна. Можно ли по этой информации однозначно определить знак среднего (т. е. пятого по счёту) из этих чисел? А его соседей слева и справа? Ответы обоснуйте.*

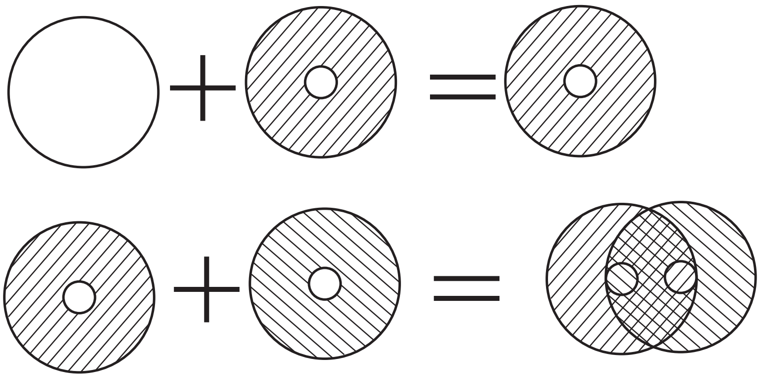
Решение. Сумма любых четырёх подряд идущих чисел отрицательна, так как она представляет собой сумму двух пар рядом стоящих чисел. Тогда отрицательна сумма всех 8 чисел, кроме центрального. Так как сумма всех 9-и чисел положительна, среднее число обязано быть положительным. Тогда его соседи слева и справа отрицательны и больше среднего по модулю.

Ответ: Можно и то, и другое.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	ОЦЕНКА
Верное доказательство того, что среднее число положительно, а его соседи — отрицательные числа	7 баллов
Верно доказана только положительность среднего числа	4 балла
Показано, что если среднее число положительно, то его соседи отрицательны, но положительность пятого числа не доказана	2 балла
Отмечено, что сумма 4-х, 6-и или 8-и последовательных чисел отрицательна	1 балл
Дан верный ответ, который только проиллюстрирован примерами (в любом количестве)	0 баллов

7.2 *Нарисуйте на плоскости фигуру, которой нельзя покрыть полукруг радиуса* 1*, но двумя экземплярами которой можно покрыть круг радиуса* 1.

Решение. Например, кольцо. Внешняя окружность радиуса 1, внутренняя — достаточно малого радиуса (так чтобы толщина кольца позволяла вместить в него эту внутреннюю окружность), например, радиуса 0,1. Тогда такая фигура не содержит отрезка длины 2, и потому не покроет полукруг радиуса 1. А две фигуры легко накроют весь круг: одну совместим с кругом (непокрытой останется только внутренняя часть кольца), второй — накроем эту часть.



К решению задачи 7.2

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	ОЦЕНКА
Приведена хотя бы одна такая фигура, показано, как двумя её экземплярами покрыть круг и обосновано, что фигура полукруг не покрывает	7 баллов
Требуемая фигура приведена, но либо не показано, как двумя её экземплярами покрыть круг, либо не доказано, что одна фигура полукруг не покроет	5 баллов
Требуемая фигура приведена, но не обосновано, что она удовлетворяет условию задачи	3 балла
Требуемая фигура не приведена (или фигуры, которые приведены, условиям задачи не удовлетворяют)	0 баллов

7.3 *В пруд с карасями запустили* 30 *щук, которые стали постепенно съедать одна другую. Щука считается сытой, если она съела трёх других щук (голодных или сытых), и на десерт каждая сытая щука съедала ровно по одному карасю (несытые щуки карасей не ели). Какое наибольшее число карасей могло быть съедено? Ответ обоснуйте.*

Решение. Максимальное число съеденных щук 29, поэтому насытится могут не более, чем $29 : 3 = 9,6666...$ то есть не больше 9 щук (и, соответственно, может быть съедено не более 9 карасей). 9 карасей может быть съедено так (способ не единственный). Выберем 9 щук и обозначим их A_1, A_2, $\ldots$, A_9. Сначала щука A_1 съедает трёх из числа невыбранных (становится сытой) и карася, затем щука A_2 съедает щуку A_1, двух невыбранных и карася, и так вплоть до щуки A_9, которая съедает щуку A_8 двух невыбранных и карася.

Ответ: 9 карасей.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	ОЦЕНКА
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Верный пример, как могут насытится 9 щук, без доказательства, что 9 — число максимальное	3 балла
Обоснование, что 10 щук насытится не смогут (при отсутствии примера, что 9 щук насыщаемы)	2 балла
Более грубые оценки и примеры насыщения менее 9 щук	0 баллов

7.4 *На столе лежат* 2020 *коробок, в некоторых из них есть конфеты, а остальные пусты. На первой коробке написано: «Все коробки пустые». На второй: «По крайней мере* 2019 *коробок пустые». На третьей: «По крайней мере* 2018 *коробок пустые» и т. д., вплоть до* 2020*-й, на которой написано: «По крайней мере одна коробка пустая». Известно, что надписи на пустых коробках ложны, а на коробках с конфетами — истинные. Определите, сколько коробок с конфетами. Ответ обоснуйте.*

Решение. Заметим, что если надпись «По крайней мере A коробок пустые» истинна при некотором A, то истинны и все последующие. Значит, коробки с конфетами — это все коробки, начиная с некоторого номера N. Тогда коробок без конфет ровно $N-1$. Надпись на N-ой коробке гласит: «По крайней мере $2021-N$ коробок пустые». Это правда. Надпись на предыдущей коробке, с номером $N-1$, такова: «По крайней мере $2021-(N-1)$ коробок пустые». Она ложна. Значит, пустых коробок $2021-N$. Из уравнения $N-1 = 2021-N$ находим, что $N = 1011$. Значит, пустых коробок 1010, а коробок с конфетами $2020-1010 = 1010$.

Ответ: 1010 коробок.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	ОЦЕНКА
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	6 баллов
Приведён верный пример (первые 2010 коробок — пустые, остальные с конфетами), но не доказано, что нет примера с другим количеством наполненных коробок	3 балла
Доказано, что номера пустых (полных) коробок — это все натуральные числа, не превосходящие (большие) фиксированного	2 балла
Верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

7.5 *Бизнесмен ехал на деловую встречу. Он рассчитывал, что если будет двигаться со скоростью 90 км/ч, то приедет на час раньше, а если 60 км/ч, то опоздает на час. С какой наименьшей скоростью он должен ехать, чтобы не опоздать? Ответ обоснуйте.*

Решение. Способ 1. Предположим, что на встречу ехали три бизнесмена, каждый на своём автомобиле. Первый (Торопыга) со скоростью 90 км/ч, второй (Черепаха) — со скоростью со скоростью 60 км/ч, а третий — Пунктуальный, его скорость и надо найти. Рассмотрим момент времени, когда Торопыга приехал на место встречи. До встречи ещё один час, до прибытия Черепахи — 2 часа. Значит, сейчас Черепаха находится на расстоянии $60 \cdot 2 = 120$ км от места встречи. Торопыга опережал Черепаху каждый час на $90 - 60 = 30$ км, значит, он был в пути $120 : 30 = 4$ часа. Место встречи, таким образом, находится от места старта на расстоянии $90 \cdot 4 = 360$ км, а встреча должна состоятся через $4+1 = 5$ часов со времени старта бизнесменов. Значит, скорость Пунктуального $360 : 5 = 72$ км/ч.

Способ 2. Пусть расстояние, которое должен проехать бизнесмен, S км, время до встречи составляет t часов, а скорость, с которой он должен ехать, чтобы прибыть вовремя (она и есть искомая скорость) равна v км/ч. Тогда имеем систему $\begin{cases} vt &= S \\ 90(t-1) &= S \\ 60(t+1) &= S \end{cases}$. Из двух последних уравнений системы находим $t = 5$, $S = 360$. Тогда из первого уравнения $S = 72$.

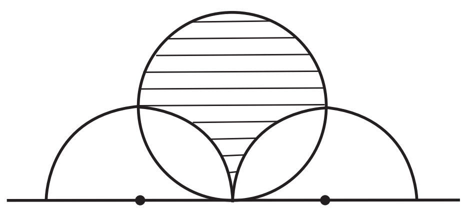
Ответ: 72 км/ч.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	ОЦЕНКА
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеются арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	6 баллов
Верно составлена, но не решена (или решена неверно) система уравнений, полностью описывающая задачу	4 балла
Верно и обосновано найдена хотя бы одна из двух величин: — расстояние, которое надо проехать; — время, которое бизнесмен должен быть в пути	3 балла
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

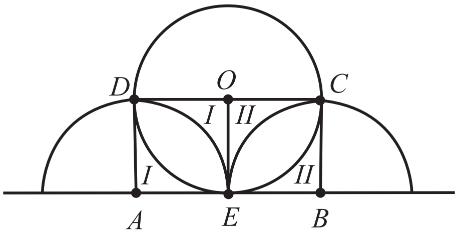
7.6 *На горизонтальной прямой отмечены точки A и B, расстояние между которыми равно 4. Выше прямой построены два полукруга радиуса 2 с центрами в точках*

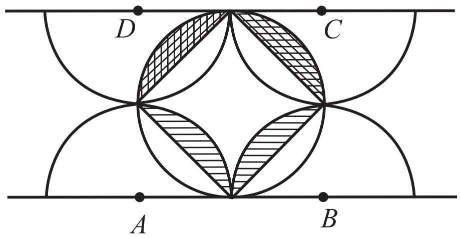
A и B. Также построен один круг, тоже радиуса 2, для которого точка пересечения этих полукругов является самой нижней точкой — см. рисунок. Найдите площадь фигуры, получающейся вычетом из площади круга общих с ним частей двух первых полукругов (заштрихованная область на рисунке). Ответ обоснуйте.

Решение. Способ 1. Обозначим середину отрезка AB через E, центр окружности через O, вторые точки пересечения окружности и полукругов — через C и D (см. рисунок). Так как радиусы полукругов и радиус окружности равны, отрезки AD, EO и BC будут равны между собой. Тогда точки D, O, C лежат на одной прямой (параллельной прямой AB), а четырёхугольник $ABCD$ будет прямоугольником со сторонами 4 и 2. Площадь такого прямоугольника 8. Покажем, что этот прямоугольник по площади равен искомой фигуре. Действительно, фигуры, обозначенные на рисунке римским числом I (а также числом II), равны в силу симметрии. DC — диаметр, он делит площадь круга пополам. Фигура, о которой идёт речь, это полукруг плюс фигура I плюс фигура II. Прямоугольник состоит из этих же фигур, только иначе расположенных.



К условию задачи 7.6





К решению задачи 7.6.

Способ 1. Способ 2.

Способ 2. Рассмотрим квадрат $ABCD$, лежащий по ту же сторону от прямой AB, что и интересующая нас фигура. Проведём полуокружности с центрами в точках C и D радиуса 2, как показано на рисунке. Точки касания полукругов лежат как раз на проведённой окружности и делят её на 4 равные части. Если теперь соединить эти точки последовательно, образуется вписанный в окружность квадрат. Наша фигура получится из этого квадрата если поменять два сегмента, заштрихованных на рисунке «в линейку» на два таких же сегмента, заштрихованных «в клетку», поэтому её площадь равна площади квадрата. Диагональ этого квадрата равна длине AB, то есть, равна 4. А тогда площадь квадрата (и площадь нашей фигуры равна 8).

Ответ: 8.

ЕСТЬ В РЕШЕНИИ	**ОЦЕНКА**
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеются арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	6 баллов
Имеется идея найти равносоставленную фигуру, площадь которой легко находится	3 балла
Указан верный ход решения (например, вычесть из площади круга площади общих частей круга с полукругами), но этот план не реализован	1 балл
Рассуждения и выкладки, из которых ход решения не виден	0 баллов